Agregation Interne de Mathématiques

Suites et Séries de Fonction 2011-2012

I .

1)

$$U_n : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2^n.x}{1+n2^nx^2}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (U_n).

2) Même question que 1 avec la suite :

$$U_n : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto n.x^n.\sin(\pi x)$$

II .

Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (1+x)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}dx\right)$

III .

1) $\lambda \in [0,1]$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}(\lambda - U_n^2)$. Etudier la suite (U_n).

2) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$P_0 : \quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} :\ & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right) \end{aligned}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (P_n).

IV . Premier théorème de Dini.

(E, d) espace métrique. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions continues et croissantes d'élément de $\mathfrak{C}(E, \mathbb{R})$, et qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathfrak{C}(E, \mathbb{R})$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $F_{n,\epsilon} = \{x \in E \ \ t.q. \ \ f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$.

1) Montrer que $(F_{n,\epsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compactes.

2) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(F_{n,\epsilon}) = \emptyset$.

3) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur E.

4) Application: Retrouver le résultat du III.2.

V . Deuxième théorème de Dini.

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction croissante. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement) vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge unifromement vers f sur $[a, b]$.

2) Application:

$$\begin{aligned} f_n :\ & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n \end{aligned}$$

la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers la fonction exponentielle sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

VI . Théorème d'approximation de Weierstross (produit de convolution).

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n > 0$ t.q. $a_n . \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 1$.

2) Calculer $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n x dx$, et en déduire que $0 < a_n < n+1$.

3) soit $\delta > 0$. Montrer que $\left(\int_{[-1,-\delta] \cup [\delta,1]} a_n (1-x^2)^n dx \right) \to_{n \to +\infty} 0$.

4) soit $f \in \mathfrak{C}([0,1];\mathbb{R})$ et

$$K_n : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n (1-x^2)^n \end{array}$$

et soit :

$$P_n = f * K_n : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x-t).K_n(t) dt \end{array}$$

a) Montrer que $P_n = K_n * f$ et en déduire que P_n est une fonction polynomiale.

b) Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur $[0,1]$.

5) $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction continue. Montrer que g est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonction polynomiale.